

**Время выполнения задания: 240 минут.**

*Информация для участников: максимальная оценка за каждую задачу — 20 баллов. Максимальная оценка за всю работу - 100 баллов. Если сумма баллов, набранных участником по всем задачам, превосходит 100, его итоговая оценка равна 100.*

1. В ряд выписаны числа от 1 до 2011 в порядке возрастания. Можно ли между ними расставить знаки  $+$  и  $-$  так, чтобы значение полученного выражения было точным квадратом натурального числа?
2. Все клетки шахматной доски последовательно пронумерованы от 1 до 64 (в каждом ряду клетки нумеруются слева направо, в первом ряду — от 1 до 8, во втором — от 9 до 16 и т.д.). На доску поставили 8 ладей так, что никакие две не бьют друг друга. Найдите все значения, которые может принимать сумма номеров полей, занятых ладьями.
3. При каких значениях  $b \neq 3$  объединение парабол  $y = x^2$  и  $y = (b - 3)x^2 + bx + 2b - 4$  имеет ось или центр симметрии?
4. Площадь параллелограмма  $ABCD$  равна 2, а его угол  $A$  равен  $45^\circ$ . Вокруг треугольников  $ABC$ ,  $BCD$ ,  $CDA$  и  $DAB$  описали окружности с центрами  $K$ ,  $L$ ,  $M$  и  $N$  соответственно. Найдите площадь четырехугольника  $KLMN$ .
5. Эльфы считают шестизначное число красивым, если сумма первых трех цифр отличается от суммы последних трех цифр на целое число, кратное 11. Сколько существует красивых по-эльфийски шестизначных (от 100 000 до 999 999) чисел?
6. Будем называть рамкой квадрат со стороной  $n$  на клетчатой бумаге, из которого вырезан квадрат со стороной  $n - 2$  с тем же центром. Пусть каждая клетка рамки раскрашена в белый или черный цвет. Назовем раскраску рамки правильной, если рамку можно разрезать на доминошки (прямоугольники  $2 \times 1$ ), каждая из которых имеет одну белую и одну черную клетку. Сколько правильных раскрасок рамки существует? (Раскраски, совпадающие при повороте квадрата, считаются разными.)

## Ответы и указания

1. Ответ: можно.

Указание: расставьте знаки между числами  $1, 2, \dots, 7$  так, чтобы в сумме получилось 4. Остальные числа разбейте на четвёрки подряд идущих, и в каждой четвёрке  $a, (a + 1), (a + 2), (a + 3)$  расставляйте знаки так, чтобы сумма была равна 0. Например так:  $+a - (a + 1) - (a + 2) + (a + 3) = 0$ .

2. Ответ: 260.

Указание: Выберем произвольные две ладьи. Пусть первая ладья стоит в клетке  $(i, j)$  ( $i$ -й столбец,  $j$ -я строка), а вторая — в клетке  $(p, q)$ . Переставим эти ладьи в клетки  $(i, q)$  и  $(p, j)$ . От этого ладьи по-прежнему не бьют друг друга, и сумма чисел в полях, занятых ладьями, не изменилась. Действуя таким образом, можно переставить все ладьи так, что они будут идти вдоль диагонали, а значит сумма чисел в занятых ими полях будет равна  $1 + 10 + 19 + 28 + 37 + 46 + 55 + 64 = 260$ .

3. Ответ:  $b = 0, b = 2, b = 4$ .

4. Ответ: 2.

Указание: пусть  $O$  — точка пересечения диагоналей  $ABCD$ . Из теоремы о вписанных углах следует  $\angle BLD = 2\angle BCD = 90^\circ \Rightarrow BO = OL$ . Кроме того  $BO \perp OL$ , т.к.  $L$  лежит на серединном перпендикуляре к  $BD$ .

Аналогичное верно для других вершин параллелограмма. Докажите, пользуясь этим, что параллелограмм  $KLMN$  равен параллелограмму  $ABCD$ .

5. Ответ: 81819.

Указание: пусть  $\overline{abcdef}$  — красивое по-эльфийски число, т.е.  $(a + b + c - d - e - f) : 11$ . Тогда согласно признаку делимости на 11 число  $\overline{adbecf}$  делится на 11. Обратное тоже верно. Следовательно красивых по-эльфийски шестизначных чисел столько же, сколько шестизначных чисел, делящихся на 11. Наименьшее шестизначное число, делящееся на 11, равно 100001, наибольшее — 999999, а всего их  $\frac{999999 - 100001}{11} + 1 = 81819$ .

6. Ответ:  $2^{2n-1} - 2$ .

Указание: разобьём вначале всю рамку на доминошки. В каждой доминошке клетки можно раскрасить двумя способами. Всего доминошек  $2n - 2$ . Значит существует  $2^{2n-2}$  способа раскраски. Учтя, что разбить рамку на доминошки можно двумя способами, получаем  $2^{2n-1}$  способ раскраски. Но при этом некоторые раскраски оказываются посчитанными дважды. А именно — раскраски с чередующимися цветами. Таких раскрасок две. Поэтому из получившегося количества нужно вычесть 2.